بسط $\sin(x \pm y)$ به کمک قضیهٔ وتر شکسته

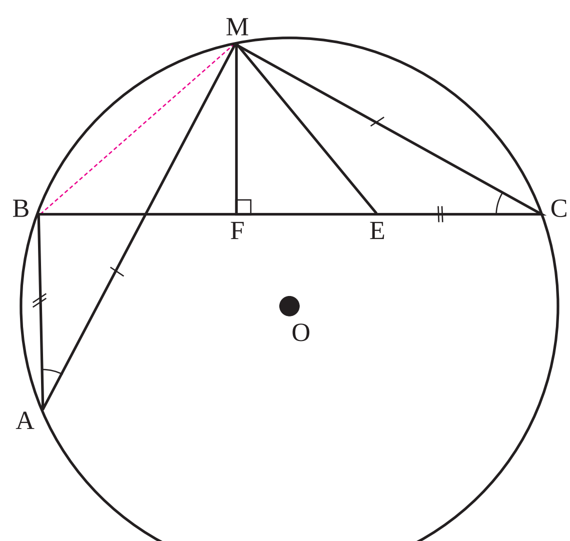
مراد کریمی
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهرکرد

اشاره

ابتدا تاریخچه و صورت قضیهٔ «وتر شکسته» را همراه با اثبات این قضیه تاریخی می‌آوریم و سپس به کمک این قضیه رابطهٔ هندسی فوق را ثابت می‌کنیم.

ابوریحان بیرونی (۱۰۴۸-۹۷۳) قضیهٔ وتر شکسته را به ارشمیدس نسبت داده است که بیان می‌کند: «هرگاه AB و BC وتر شکسته‌ای را در یک دایره تشکیل دهند، به‌طوری‌که BC>AB و نقطهٔ M وسط قوس ABC باشد، آن‌گاه F پای عمود وارد از M بر BC نقطهٔ وسط وتر شکسته ABC است.»

اثبات قضیهٔ وتر شکسته: از آنجا که نقطهٔ M وسط قوس ABC است، پس کمان‌های ABM و MC با هم برابرند. در نتیجه وترهای نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند؛ یعنی: AM=MC.
حال روی BC به اندازهٔ AB جدا می‌کنیم (BC>AB) و آن را EC می‌نامیم. اکنون ثابت می‌کنیم دو مثلث ABM و MEC هم‌نهشت‌اند.



شکل ۱

$$\left.\begin{array}{ll} MC = MA & \text{(وترهای نظیر کمان‌های مساوی)} \\ \hat{A} = \hat{C} & \text{(زوایای محاطی مقابل به یک کمان)} \\ AB = EC & \text{(طبق توضیح فوق)} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{MEC} \text{(ض‌زض)} \Rightarrow \boxed{BM = ME}\ (۱) \qquad \text{اجزای متناظر}$$

در ادامه نشان می‌دهیم، دو مثلث MBF و MEF به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند؛ یعنی:

$$\left.\begin{array}{ll} MB = ME & \text{(وتر)} \\ MF = MF & \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{MBF} \cong \overset{\Delta}{MEF} \qquad \text{(وتر و یک ضلع)}$$

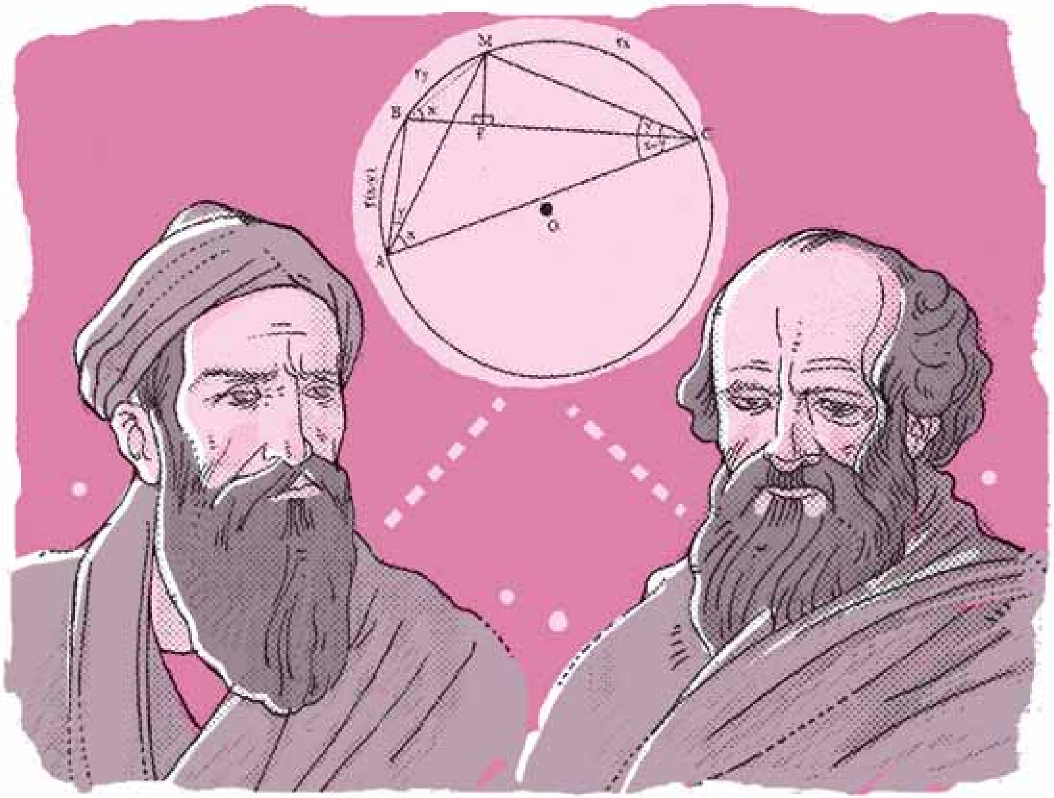
$$\Rightarrow \boxed{BF = FE}\ (۲) \qquad \text{اجزای متناظر}$$

از روابط (۱) و (۲) و تساوی AB=EC نتیجه می‌گیریم:

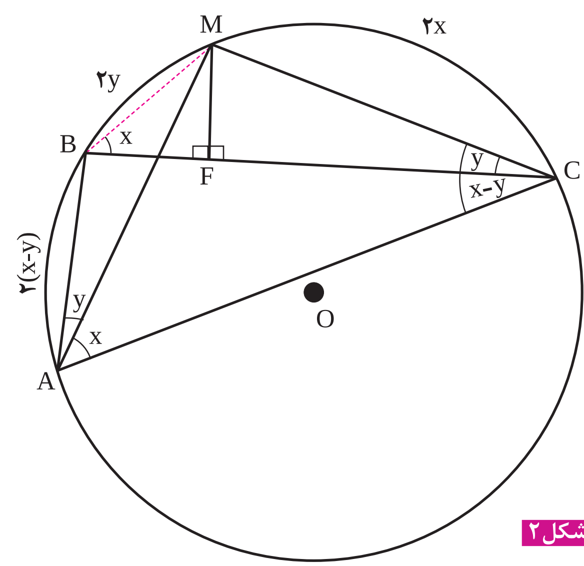
$$\left.\begin{array}{l} AB = EC \\ BF = FE \end{array}\right. \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} AB + BF = \underbrace{FE + EC}_{FC}$$

$$\Rightarrow AB + BF = FC$$

تساوی اخیر بیان می‌کند که نقطهٔ F پای عمود وارد از M بر وتر شکستهٔ ABC وسط وتر شکسته قرار دارد.
حال به کمک قضیهٔ وتر شکسته رابطهٔ مثلثاتی فوق را از روی شکل ۲ ثابت می‌کنیم. اگر در این شکل داشته باشیم:



۲x=(قــوس MC) و ۲y=(قــوس BM)، در ایــن صــورت به کمک «قضیــهٔ ســینوس‌ها» که بیــان می‌کند در هر مثلــث دلخواه ABC رابطهٔ (R شــعاع دایــرهٔ محیطی) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ برقــرار اســت، داریــم: (شــعاع دایرهٔ محیطــی را ۱ واحــد در نظر می‌گیریم R=1)



شکل ۲

$$\overset{\Delta}{AMC}: \frac{MC}{\sin x}=2R \Rightarrow MC=2\sin x$$

$$\overset{\Delta}{ABM}: \frac{BM}{\sin y}=2R \Rightarrow BM=2\sin y$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{BC}{\sin(x+y)}=2R \Rightarrow BC=2\sin(x+y)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AB}{\sin(x-y)}=2R \Rightarrow AB=2\sin(x-y)$$

$$\overset{\Delta}{MFC}: \cos y=\frac{FC}{MC}=\frac{FC}{2\sin x} \Rightarrow FC=2\sin x.\cos y$$

$$\overset{\Delta}{BMF}: \cos x=\frac{BF}{BM}=\frac{BF}{2\sin y} \Rightarrow BF=2\cos x.\sin y$$

الف) با توجه به وتر BC

$$\Rightarrow BC=BF+FC$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+y)=2\sin x.\cos y+2\cos x.\sin y$$

$$\overset{\div 2}{\Rightarrow} \boxed{\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y}$$

ب) چون F وسط وتر شکسته ABC است

$$\Rightarrow AB+BF=FC \Rightarrow AB=FC-BF$$

$$\Rightarrow 2\sin(x-y)=2\sin x.\cos y-2\cos x.\sin y$$

$$\overset{\div 2}{\Rightarrow} \boxed{\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y}$$

* منبع

هاورد. ایوز (۱۳۷۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج ۱). ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.